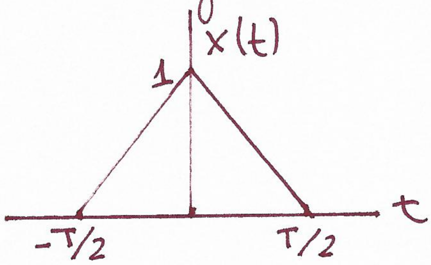
PROBLEMA 1. Demostrar, aplicando la propiedad de derivación, que la transformada de Fourier de la función triángulo mostrada en la figura viene dada por la siguiente expresión:



$$X(j\omega) = \frac{T}{2}\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$*\ \text{sen}^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$

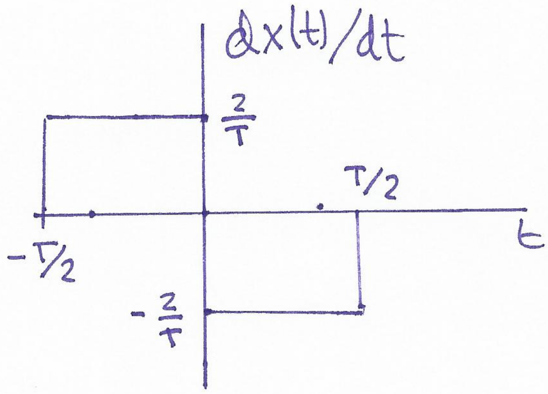
Propiedad de derivación de la transformada de Fourier:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

Calculamos la derivada de x(t):

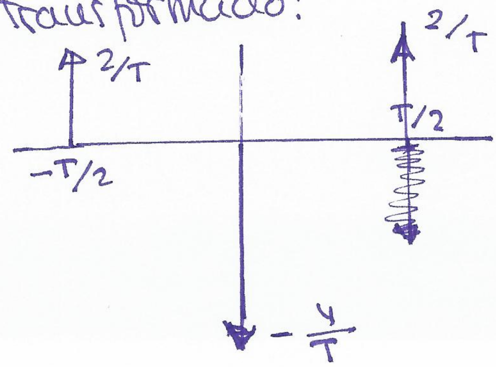
$$m_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{1-0}{0-(-\frac{T}{2})} = \frac{2}{T}$$

$$m_2 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{1-0}{0-\frac{T}{2}} = -\frac{2}{T}$$



Calculamos la derivada segunda y vemos su representación en la frecuencia, en el dominio transformado:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^2 X(j\omega)$$



La expresión analítica de $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{2}{T}\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{4}{T}\delta(t) + \frac{2}{T}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

Calculamos la transformada de Fourier:

$$X_2(j\omega) = \frac{2}{T}e^{j\omega T/2} - \frac{4}{T} + \frac{2}{T}e^{-j\omega T/2} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}\right) - \frac{4}{T} =$$

$$= \frac{4}{T}\cos\frac{\omega T}{2} - \frac{4}{T} = -\frac{4}{T}\left(1-\cos\frac{\omega T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{T}\left(1-\cos 2\frac{\omega T}{4}\right) =$$

$$= -\frac{8}{T}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

(donde $X_2(j\omega)$ es la transformada de la derivada segunda respecto al tiempo).

Como $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow \underbrace{(j\omega)^2 X(j\omega)}_{X_2(j\omega)}$$

podemos escribir:

$$X_2(j\omega) = -\frac{8}{T}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = (j\omega)^2 X(j\omega)$$

y así obtener $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) = \frac{-1}{(j\omega)^2} \, \frac{8}{T} \, \text{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) =$$

$$= \frac{8}{\omega^2 T} \, \text{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{T}{2} \, \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$$\frac{8}{\omega^2 T} \, \text{sen}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{8}{\omega^2 T} \cdot \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)}{\frac{4}{\omega T}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)} \cdot \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)}{\frac{4}{\omega T}\left(\pi \frac{\omega T}{4\pi}\right)} =$$

$$= \frac{T}{2} \, \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

PROBLEMA 2. Un sistema LTI discreto esté caracterizado por la siguiente respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

a) Obtener la ecuación en diferencias que rige al sistema.

El sistema es LTI, luego:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Por la propiedad de convolución:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega})$$

y la respuesta en frecuencia:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(e^{j\Omega})\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right] = X(e^{j\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})$$

La propiedad de desplazamiento:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$$

por lo que podremos escribir la ecuación en diferencias será:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

b) Calcular la salida correspondiente a la señal de entrada $x[n]$ definida como:

$$x[n] = 1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Calculamos el espectro de la señal de entrada:

$$1 \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi\delta(\Omega)$$

$$\cos(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{DTFT} \pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi\delta(\Omega) + 3\pi\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Hemos visto que el espectro de la salida del sistema se obtiene multiplicando el espectro de la señal de entrada por la respuesta en frecuencia:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} X(e^{j\Omega}) =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\left[2\pi\delta(\omega)+3\pi\left(\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] =$$

Sabemos que:

$$x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$
$$x[n]\cdot\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

luego:

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\cdot 0}}\,2\pi\,\delta(\Omega) +$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}\cdot 3\pi\,\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{2}) +$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}}\,3\pi\,\delta(\Omega+\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= 4\pi\,\delta(\Omega) + \frac{3\pi}{1+\frac{j}{2}}\,\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{3\pi}{1-\frac{j}{2}}\,\delta(\Omega+\tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= 4\pi\,\delta(\Omega) + \frac{6\pi}{2+j}\,\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{6\pi}{2-j}\,\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{2})$$

$$\frac{6\pi}{2+j} = \frac{6\pi(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{12\pi-6\pi j}{4+1} = \frac{12\pi}{5} - j\,\frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{6\pi}{2-j} = \frac{6\pi(2+j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{12\pi+6\pi j}{5} = \frac{12\pi}{5} + j\,\frac{6\pi}{5}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = 4\pi\delta(\Omega) + \frac{12\pi}{5}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right) - j\,\frac{6\pi}{5}\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{12\pi}{5}\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right) + j\,\frac{6\pi}{5}\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\delta(\Omega) + \frac{12\pi}{5}\left(\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)\right) -$$

$$- j\,\frac{6\pi}{5j}\,j\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)-\delta(\Omega+\pi/2)\right];$$

Luego la señal $y[n]$:

$$y[n] = 2 + \frac{12}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{6}{5}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Otra forma: representamos la entrada como combinación exponenciales complejas:

$$x[n] = 1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 1 + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)$$

y como la exponencial compleja es una función propia de los sistemas LTI sabemos que:

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \quad \text{si } x[n] = e^{j\Omega n}$$

e $\quad y[n] = \sum H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \quad$ si $x[n] = \sum e^{j\Omega n}$

luego:

$$y[n] = H(0)e^{j0n} + \frac{3}{2}H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{3}{2}H(e^{-j\frac{\pi}{2}})e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

Como el sistema es real ($h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$)

$$H(e^{j\Omega}) = H^*(e^{-j\Omega})$$

y además: $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

Luego: $y[n] = H(0) + \frac{3}{2}\, 2\,\mathrm{Re}\{H(e^{j\frac{\pi}{2}})\, e^{j\pi/2\, n}\}$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2})(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/2})} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}\left(1-\frac{j}{2}\right)$$

$$\mathrm{Re}\{H(e^{j\pi/2})\, e^{j\frac{\pi}{2}n}\} = \frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{2}j\right)\left[\cos\frac{\pi}{2}n + j\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}n\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\{\frac{4}{5}\cos\frac{\pi}{2}n + j\frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}n - \frac{4}{5}\frac{j}{2}\cos\frac{\pi}{2}n +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}n\} = \frac{4}{5}\left[\cos\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}n\right]$$

$$H(e^{j0}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Luego:

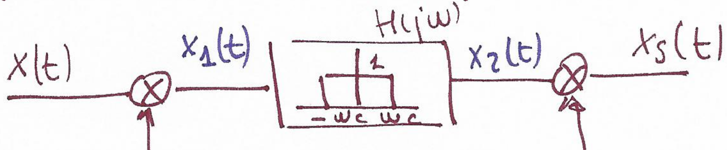
$$y[n] = 2 + \frac{12}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{6}{5}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

PROBLEMA 3. Una alternativa al procedimiento de muestreo de señales paso banda se representa en el sistema de la figura 3a. La frecuencia de corte del filtro paso bajo representado en el esquema es $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$. Para una señal real paso banda $x(t)$, con el espectro mostrado en la figura 3b,

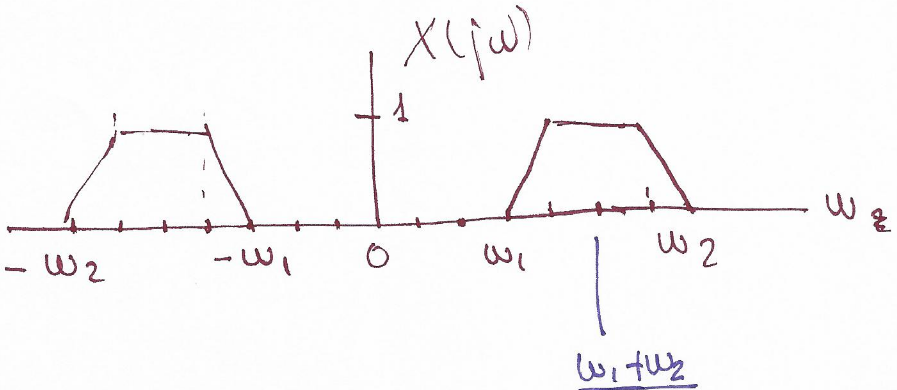
a) Dibujar el espectro de la señal muestreada

b) Determinar el valor máximo del intervalo de muestreo T_s que no introduce aliasing.

c) Determinar un sistema de reconstrucción que permita recuperar $x(t)$ de la señal muestreada $x_s(t)$. Justificar gráficamente la respuesta.



$$q(t) = e^{j\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t} \qquad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



a) Dibujar espectro de la señal muestreada.

Calculamos $x_1(t)$ y $X_1(j\omega)$

$$x_1(t) = x(t) \cdot q(t)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Q(j\omega)$$

Para obtener $Q(j\omega)$ recordamos que:

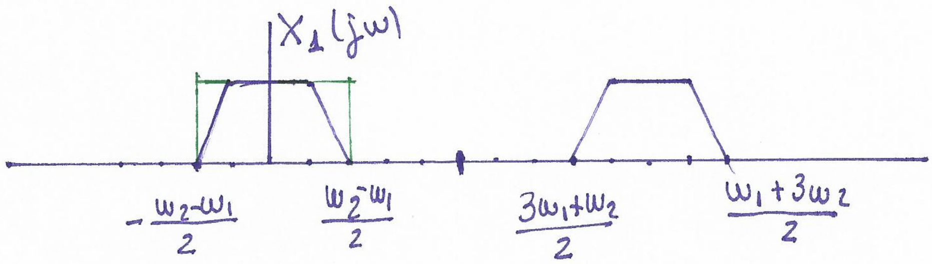
$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$$

luego: $Q(j\omega) = 2\pi\,\delta\left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$; $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$

y la señal $X_1(j\omega)$:

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} X(j\omega) * \cancel{2\pi}\,\delta\left(\omega - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) =$$

$$= X\left(j\omega - j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$



$\omega_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{3\omega_1 + \omega_2}{2}$ $\qquad -\omega_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

$\omega_2 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_1 + 3\omega_2}{2}$ $\qquad -\omega_2 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

Calculamos $x_2(t)$ y $X_2(j\omega)$:

$$x_2(t) = x_1(t) * h(t)$$

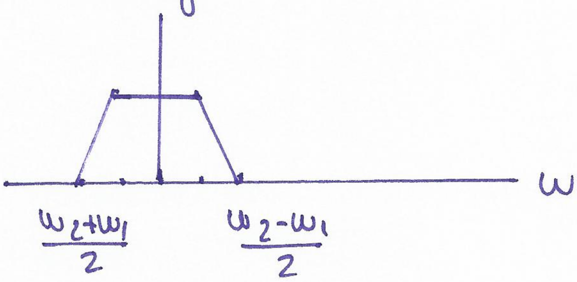
$$X_2(j\omega) = X_1(j\omega)\, H(j\omega)$$

donde $H(j\omega)$ es la respuste en frecuencia del filtro paso bajo de frecuencia de corte $\omega_c = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ 0, & \text{otro } \omega \end{cases}$$

(dibujado en figura anterior.)

Luego $X_2(j\omega)$:



Finalmente calculamos el espectro de la señal muestreada:

$$x_s(t) = x_2(t) \cdot s(t)$$

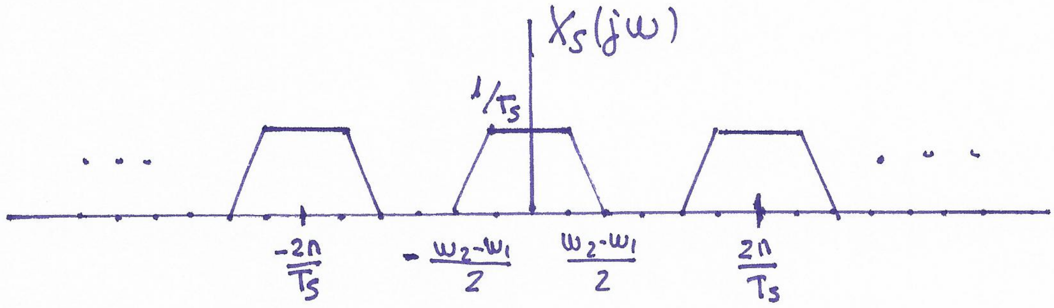
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_2(j\omega) * S(j\omega)$$

Sabemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} X(j\omega) * \frac{\cancel{2\pi}}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) =$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T_s}\right)$$



b) Valor máximo T_s para evitar aliasing

Para evitar aliasing: (inspección)

$$\frac{2\pi}{T_s} - \frac{\omega_2-\omega_1}{2} \geq \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq \frac{\omega_2-\omega_1}{2} + \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \omega_2-\omega_1 \Rightarrow T_s \leq \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

Vemos que si aplicamos el teorema de muestreo:

$$\omega_s > 2\,\omega_M$$

$$\frac{2\pi}{T_s} > 2\,\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

$$T_s < \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

c) Recuperar $x(t)$:

Para recuperar la señal $x(t)$, filtramos y multiplicamos por $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$

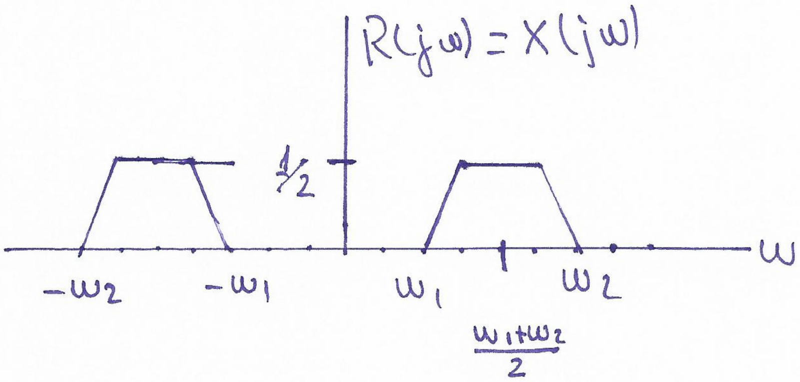
Utilizamos un filtro paso bajo de frecuencia de corte $\omega_c = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ y así eliminamos las réplicas de mayor frecuencia.

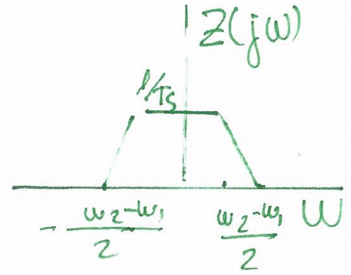
La transformada del $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)$ es:

$$C(j\omega) = \pi\,\delta\left(\omega - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + \pi\,\delta\left(\omega + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

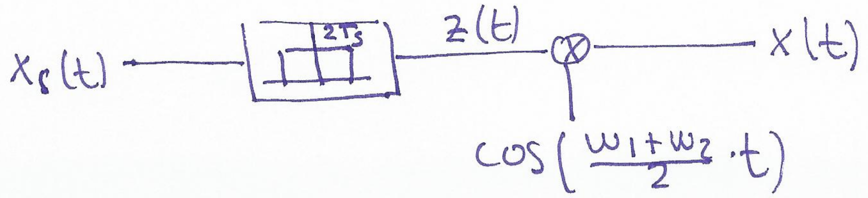
El espectro de la señal recuperada:

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} Z(j\omega) * C(j\omega) = \frac{1}{2}\left(Z\left(j\omega - j\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + Z\left(j\omega + j\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)$$

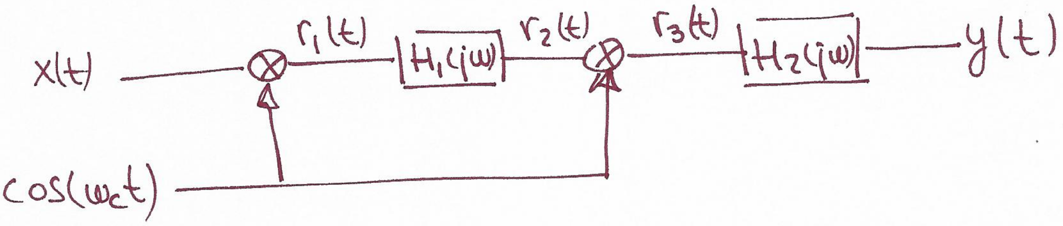




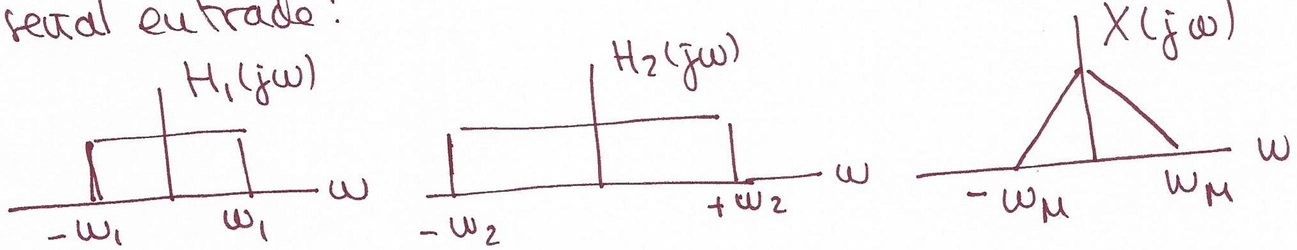
El sistema de recuperación:



PROBLEMA 4. Mediante la conexión de dos filtros paso-bajo y de un oscilador de frecuencia ω_0 se puede sintetizar un filtro, tal y como se describe a continuación:



Las respuestas en frecuencia de los filtros paso bajo y el espectro de la señal entrada:



Se sabe que: $\omega_1 < \omega_2$ $\qquad \omega_M < \omega_c$

$\omega_1 < \omega_c \qquad \omega_2 < \omega_M$

$\omega_1 > \omega_c - \omega_M \qquad \omega_2 > \omega_c - \omega_1$

a) Dibujar el espectro de $r_1(t)$, $r_2(t)$ y $r_3(t)$, especificando claramente los valores sobre el eje de abscisas, precisando también las amplitudes cuando sea posible.

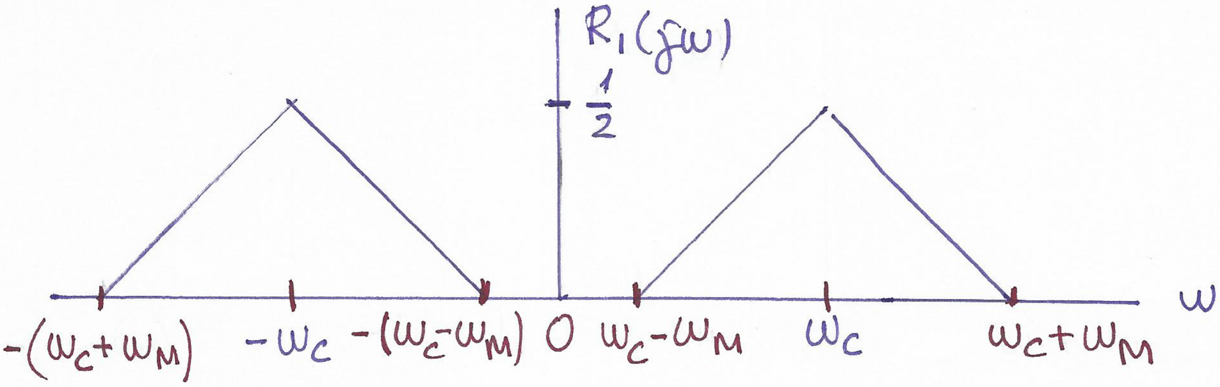
- Espectro $R_1(j\omega)$:

$$r_1(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_c t) \xleftrightarrow{FT} R_1(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega)$$

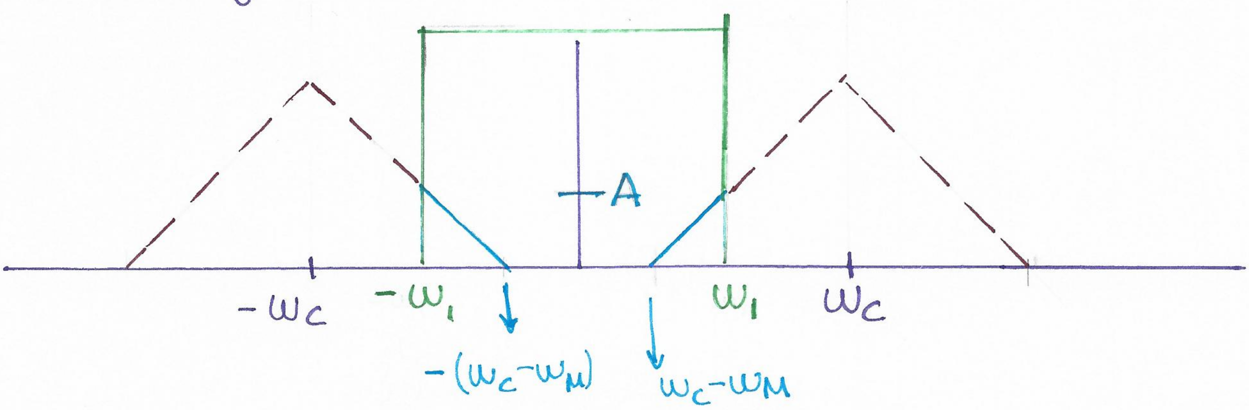
donde $C(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right)$

$$R_1(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} X(j\omega) * \cancel{\pi}\left(\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_c)$$



Hacemos pasar la señal por un filtro pasobajo de frecuencia de corte ω_1 y así obtenemos $R_2(j\omega)$



El espectro $R_2(j\omega)$ sería $R_1(j\omega)\cdot H(j\omega)$

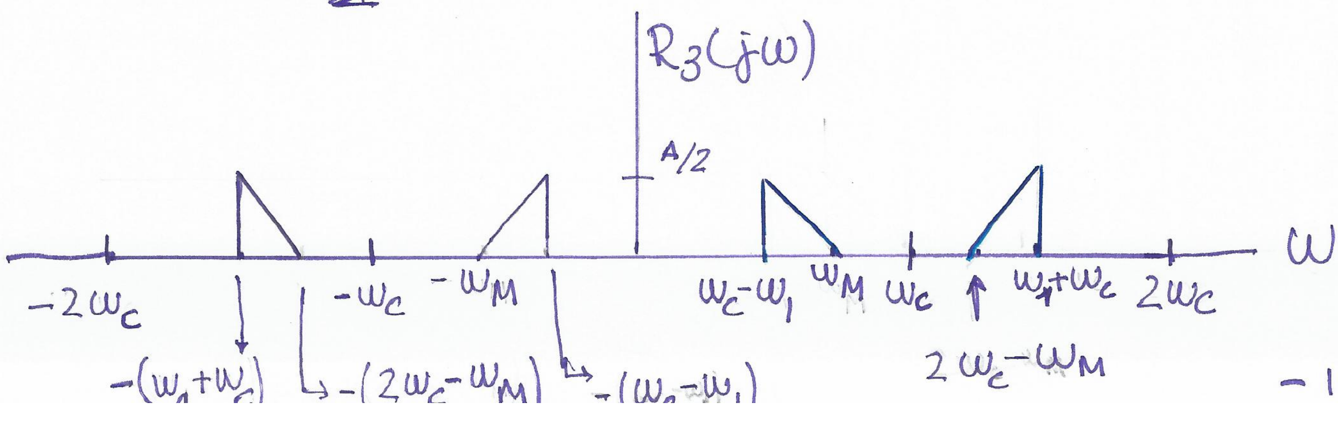
El espectro $R_3(j\omega)$ se obtiene aplicando nuevamente la propiedad de multiplicación:

$$r_3(t) = r_2(t)\cdot \cos(\omega_c t)$$

$$R_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(R_2(j\omega) * C(j\omega)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} R_2(j\omega) * \pi\left(\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} R_2(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2} R_2(j\omega + j\omega_c)$$



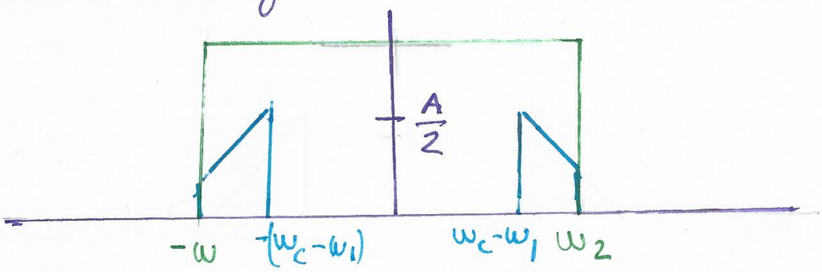
b) Determinar el tipo de filtro que representa el sistema.

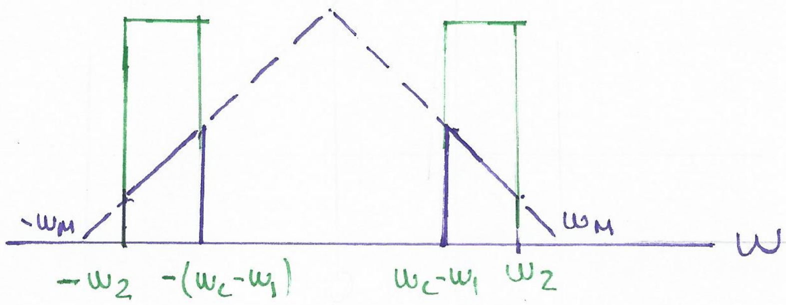
Para obtener y(t) hacemos pasar ~~el sistema~~ la señal por el filtro paso bajo:

$$y(t) = r_3(t) * h_2(t)$$

es decir, $Y(jw) = R_3(jw) \cdot H_2(jw)$

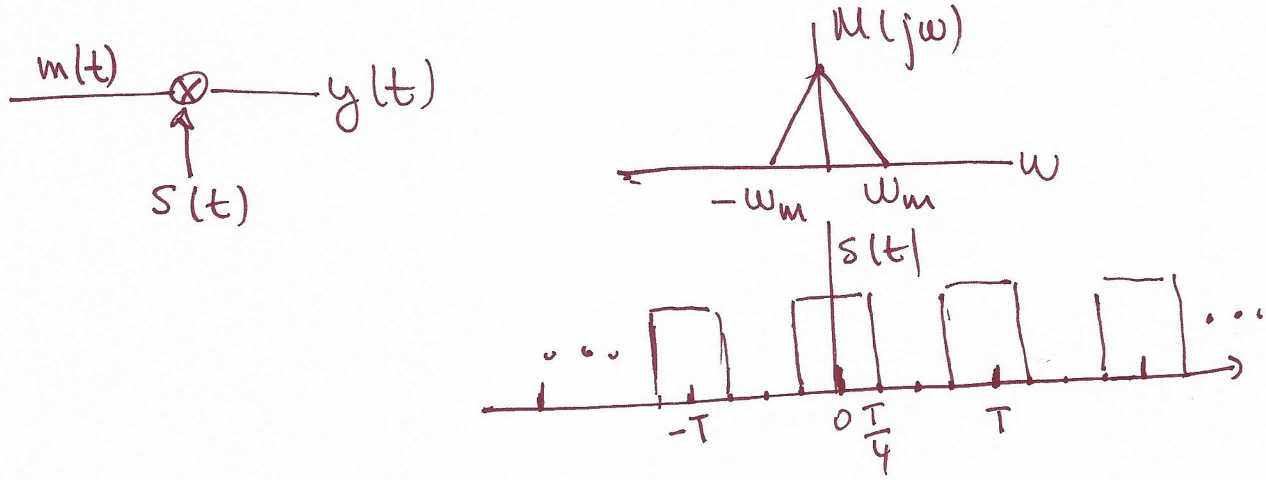
El filtro tiene frecuencia de corte w_2 y sabemos que $w_2 < w_M$ y $w_2 > w_c - w_1$





Luego el sistema actúa como filtro pasobanda

PROBLEMA 5. Considerar el sistema mostrado en la figura. Se sabe que $m(t)$ es una señal cuyo espectro satisface la condición $|M(j\omega)| = 0$ para $|\omega| > \omega_m$ y que $s(t)$ es un pulso periódico de periodo T. Ambas señales se representan en la figura P3.2.



a) Determinar el valor máximo del periodo de muestreo para que $m(t)$ pueda reconstruirse a partir de $y(t)$:

La respuesta del sistema viene dada por (fig 3.1).

$$y(t) = m(t) \cdot s(t)$$

Por la propiedad de multiplicación:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} M(j\omega) * S(j\omega)$$

Calculamos el espectro del pulso periódico $s(t)$:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_s)}{k} \delta(\omega - k\omega_0) =$$

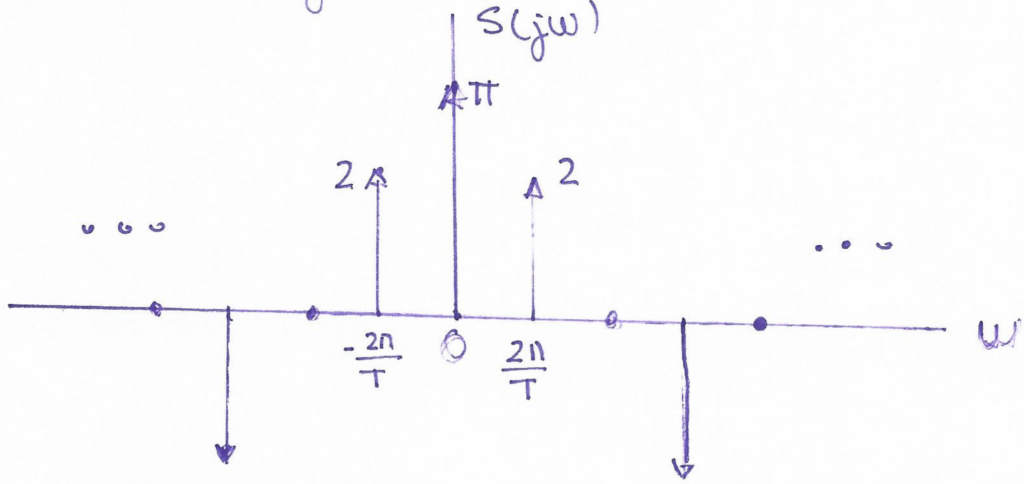
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)}{k} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\,\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} = 2\,\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{k}{2}\right)} = \pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

Representamos $S(j\omega)$

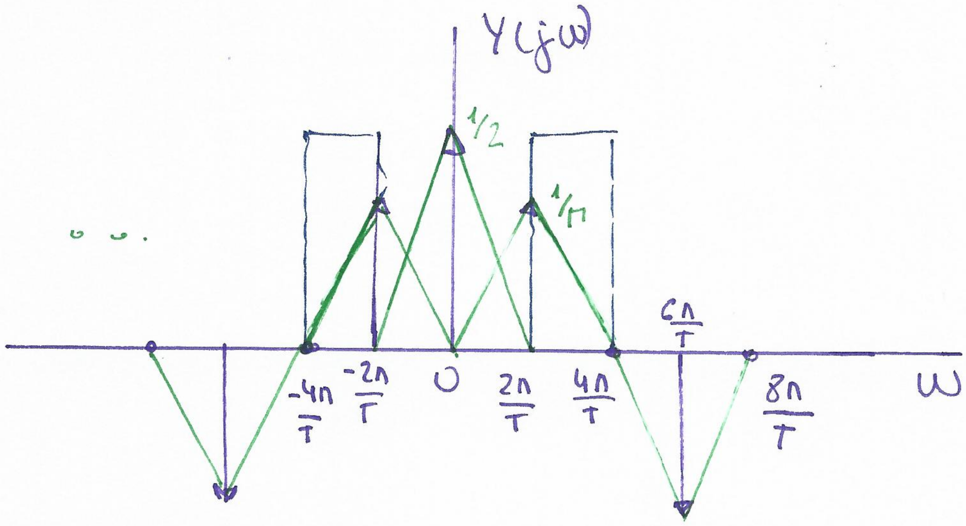


Del teorema de muestreo sabemos que:

$$\omega_s > 2\omega_m$$

$$\frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_m \Rightarrow T_s < \frac{\pi}{\omega_m}$$

Observando el espectro $S(j\omega)$ se ve que el impulso es nulo en $2\omega_0 = \frac{4\pi}{T}$ y que, en consecuencia, el periodo de muestreo puede crecer hasta $\frac{2\pi}{\omega_m}$ pues es suficiente que se cumpla que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \geq \omega_m$ para evitar el solapamiento. Por ello:



que se corresponde con:

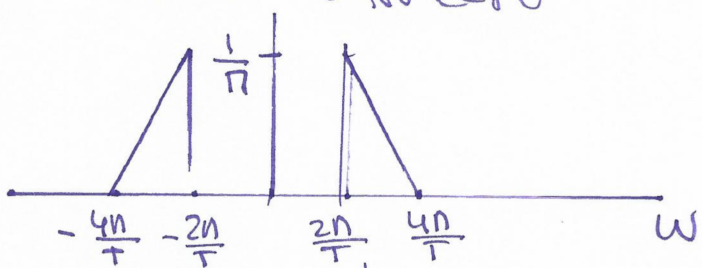
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} M\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) M\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

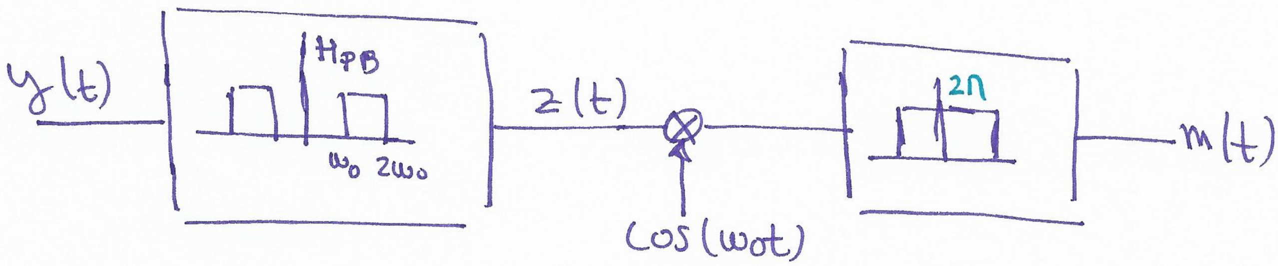
b) A partir del valor máximo, determinar el sistema que permite recuperar la señal transmitida m(t)

Para recuperar la señal, primero debo filtrar la señal muestreada con un filtro paso banda:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \frac{2\pi}{T} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{T} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$



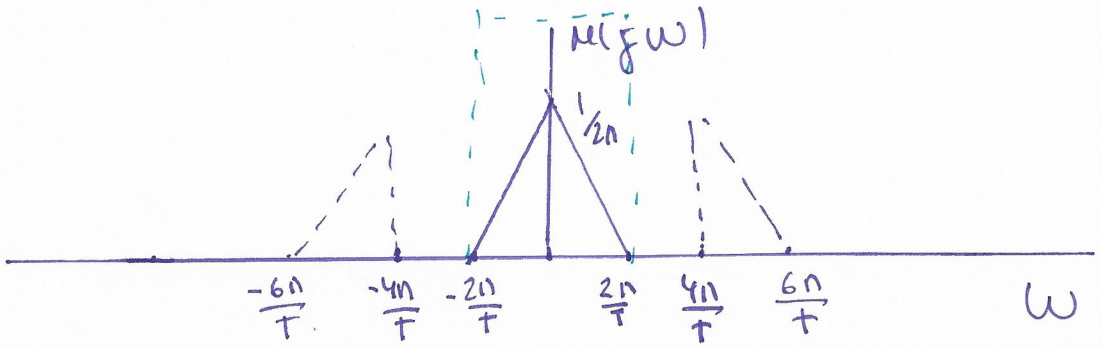
Debemos desplazar las muestras al origen y eso se consigue modulando con un coseno de frecuencia $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



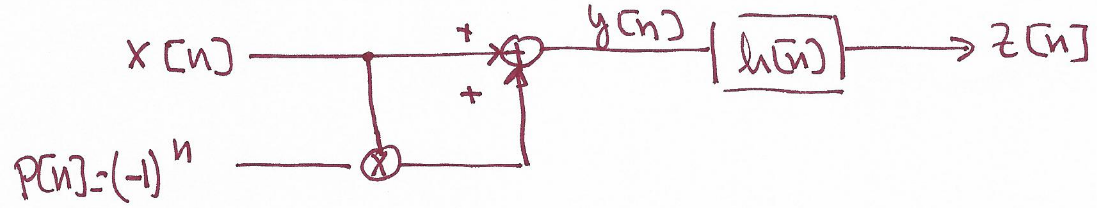
$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$z(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} Z(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] =$$

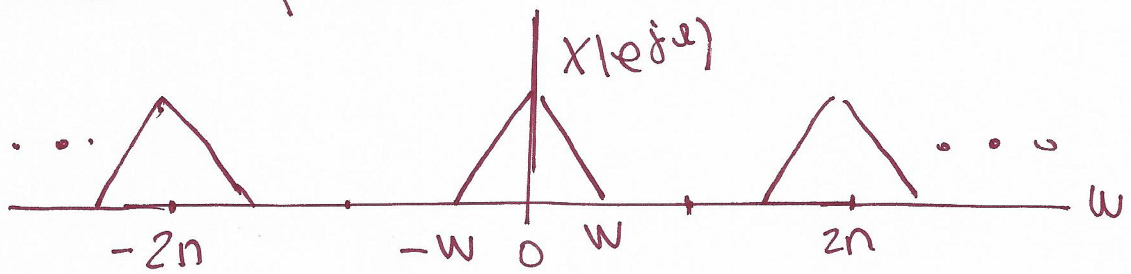
$$= \frac{1}{2}\left[Z(j\omega-j\omega_0)+Z(j\omega+j\omega_0)\right]$$



PROBLEMA 6. Un sistema discreto viene descrito por el siguiente diagrama de bloques:



Conocemos el espectro de la señal de entrada:



a) Calcular el espectro de la señal y[n]

Analizamos el diagrama de bloques y vemos que:

$$y[n] = x[n] + p[n] \cdot x[n]$$

Podemos escribir p[n] como una exponencial compleja:

$$p[n] = (-1)^n = e^{j\pi n}$$

Por la propiedad de linealidad y multiplicación:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{2\pi}\left[X(e^{j\Omega}) * P(e^{j\Omega})\right]$$

Calculamos la transformada de p[n]:

$$P(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell)$$

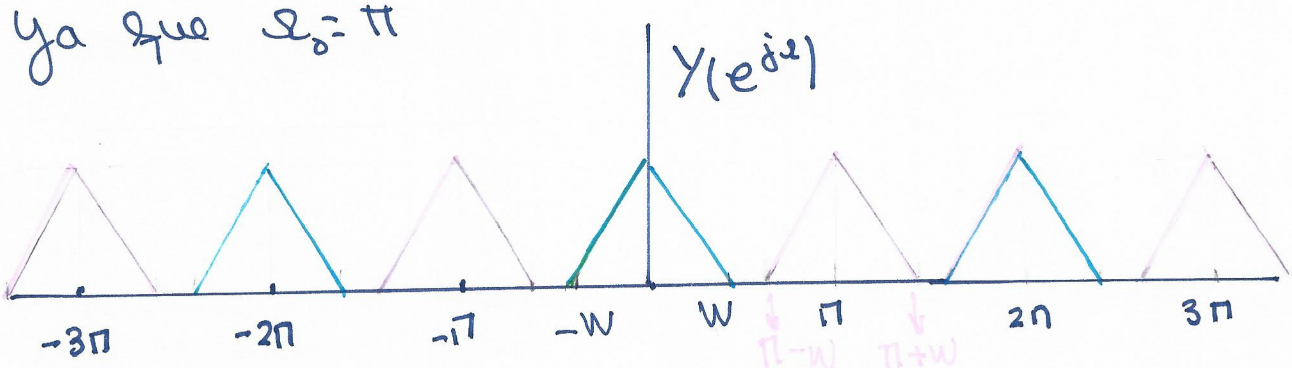
y sustituyendo en la expresión dada para $Y(e^{j\Omega})$:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{\cancel{2\pi}} X(e^{j\Omega}) * \cancel{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi\ell) =$$

$$= X(e^{j\Omega}) + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)}\right) =$$

$$= X(e^{j\Omega}) + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j(\Omega-\pi-2\pi\ell)}\right)$$

ya que $\Omega_0 = \pi$



y observamos que se suman réplicas en múltiplos impares de π y que la componente espectral en $n\pi$, con n par, coincide con la señal original.

b) Determinar el valor máximo de W para que se pueda recuperar la señal de entrada

Por inspección se observa que $\pi - W \geq W$, luego:

$$2W \leq \pi \Rightarrow \boxed{W \leq \frac{\pi}{2}}$$

Si hubiéramos aplicado el teorema de muestreo:

$$\omega_s > 2\,\omega_M$$

y sabiendo que $\omega_s = \pi$ y $\omega_M = W$:

$$\pi > 2W \Longrightarrow \boxed{W < \frac{\pi}{2}}$$

c) Calcular la respuesta en frecuencia del sistema de forma que $z[n]$ sea igual a $x[n]$, supuesta la relación obtenida en el apartado anterior.

Recordad que

$H(e^{j\Omega})$ es la respuesta en frecuencia del sistema

$$h[n] \xleftrightarrow{DFFT} H(e^{j\Omega})$$

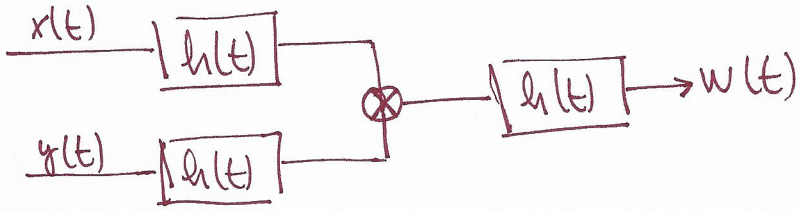
$$z[n] = y[n] * h[n]$$

luego $Z(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})\,H(e^{j\Omega})$.

Queremos que $Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})$, luego $H(e^{j\Omega})$ debe ser un tren de pulsos periódico de periodo 2π y amplitud unidad:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\Omega| \le W \\ 0, & W < |\Omega| \le \pi \end{cases} \; ; \text{ periódica } 2\pi$$

PROBLEMA 7. Calcular la salida $w(t)$ del sistema representado por el siguiente diagrama de bloques:



sabiendo que:

$$h(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$$

y las señales $x(t)$ e $y(t)$ se corresponden con las siguientes expresiones:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k 4\pi t) \; ; \quad y(t) = \sum_{k=1}^{10} \cos(k 8\pi t)$$

Analizando el diagrama de bloques podemos escribir:

$$z(t) = \Big[\underbrace{(x(t) * h(t))}_{x_h(t)} \cdot \underbrace{(y(t) * h(t))}_{y_h(t)} \Big] * h(t)$$

Trabajaremos en el dominio transformado:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \Rightarrow H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 10\pi \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$\cos(\omega_c t) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right]$$

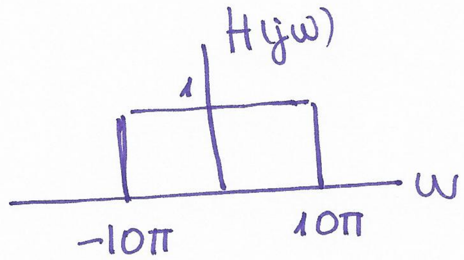
luego: $X(j\omega) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\delta(\omega - k4\pi) + \delta(\omega + k4\pi)\right]$

$$Y(j\omega) = \pi \sum_{k=1}^{10} \left[\delta(\omega - k8\pi) + \delta(\omega + k8\pi)\right]$$

Aplicando la propiedad de convolución podemos calcular $X_h(j\omega)$ e $Y_h(j\omega)$:

$$X_h(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y_h(j\omega) = Y(j\omega) \cdot H(j\omega)$$



luego vemos que se filtran la mayor parte de los armónicos de $X_h(j\omega)$ e $Y_h(j\omega)$.

$$X_h(j\omega) = \pi\,\delta(\omega - 4\pi) + \pi\,\delta(\omega + 4\pi) + \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega - 8\pi) + \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega + 8\pi)$$

$$Y_h(j\omega) = \pi\,\delta(\omega - 8\pi) + \pi\,\delta(\omega + 8\pi)$$

Calculamos ahora $m(t) = x_h(t) \cdot y_h(t)$ sin más que aplicar la propiedad de multiplicación:

$$M(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_h(j\omega) * Y_h(j\omega) = \frac{1}{2\pi} Y_h(j\omega) * X_h(j\omega)$$

$$M(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \left[\delta(\omega - 8\pi) + \delta(\omega + 8\pi)\right] * X_h(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{2} X_h(j\omega - j8\pi) + \frac{1}{2} X_h(j\omega + j8\pi)$$

y sustituyendo $X_m(j\omega)$:

$$M(j\omega) = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega - 12\pi) + \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega - 4\pi) + \frac{\pi}{4}\,\delta(\omega - 16\pi) + \frac{\pi}{4}\,\delta(\omega) +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega + 4\pi) + \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega + 12\pi) + \frac{\pi}{4}\,\delta(\omega) + \frac{\pi}{4}\,\delta(\omega + 16\pi) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)\right] +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - 12\pi) + \delta(\omega + 12\pi)\right] +$$

$$+ \frac{\pi}{4}\left[\delta(\omega - 16\pi) + \delta(\omega + 16\pi)\right]$$

Finalmente, la salida del sistema $w(t) = m(t) * h(t)$ tiene la siguiente transformada:

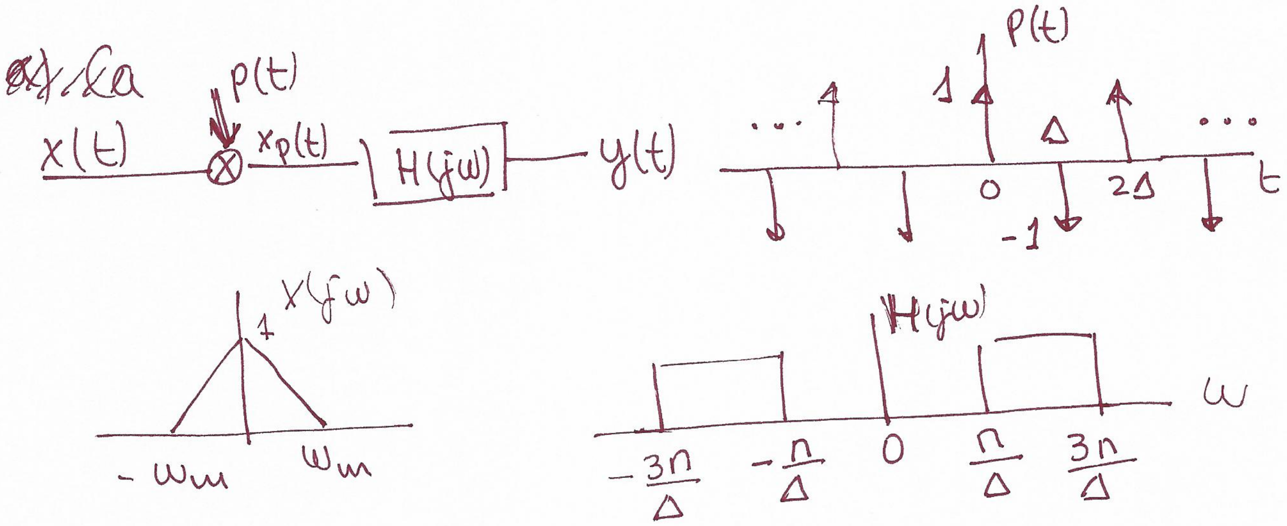
$$w(t) = m(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} W(j\omega) = M(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

es decir, $W(j\omega)$ es la señal $M(j\omega)$ filtrada mediante un filtro paso bajo de frecuencia de corte $\omega_c = 10\pi$:

$$Z(j\omega) = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)\right]$$

y $\boxed{z(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)}$

PROBLEMA 8. En la figura 1a se presenta un sistema de muestreo en el que la señal $p(t)$ es el tren de impulsos de la figura 1b. La transformada de Fourier de la señal de entrada y la respuesta en frecuencia del filtro se muestra en las figuras 1c y 1d, respectivamente.



a) Calcular y representar adecuadamente el espectro de las señales $x_p(t)$ e $y(t)$ especificando el valor máximo de Δ en función de ω_m para evitar el solapamiento.

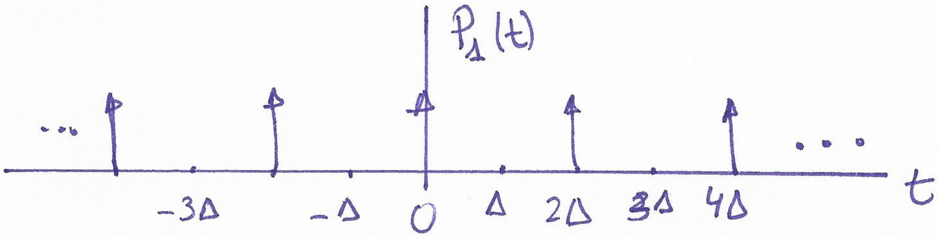
Calculamos $x_p(t)$:

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

El espectro se obtiene sin más que aplicar la propiedad de modulación:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega).$$

Calculamos el espectro del tren de impulsos. Para ello consideramos la siguiente función:



$$p_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n2\Delta) \quad \text{pues } T = 2\Delta$$

La señal $p(t)$ de muestreo puede verse en función de $p_1(t)$ como:

$$p(t) = p_1(t) - p_1(t-\Delta)$$

y su espectro se obtiene aplicando la propiedad de linealidad y desplazamiento temporal:

$$P(j\omega) = P_1(j\omega) - e^{-j\omega\Delta} P_1(j\omega) =$$

$$= P_1(j\omega)\left(1 - e^{-j\omega\Delta}\right)$$

De las tablas:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

luego $p_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n2\Delta) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{2\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{2\Delta}k\right)$

es decir, $P_1(j\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{\Delta}\right)$

Por lo tanto:

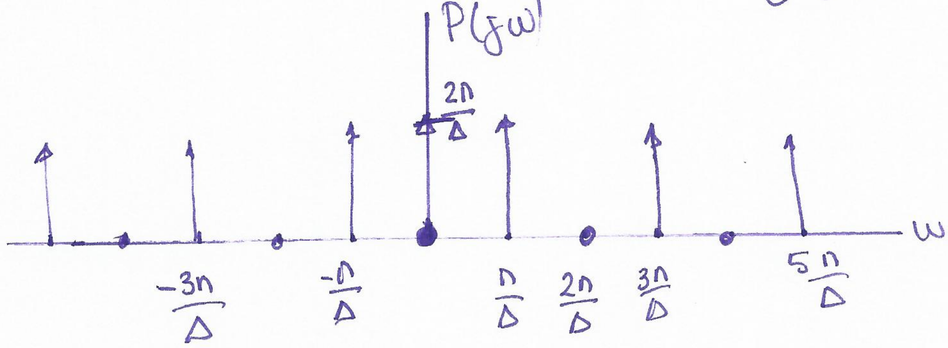
$$P(j\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{\Delta}\right)\left[1 - e^{-j\omega\Delta}\right]$$

$$e^{-j\omega\Delta} = e^{-jk\omega_0\Delta} = e^{-jk\frac{2\pi}{T}\Delta} = e^{-jk\frac{2\pi}{2\Delta}\cdot\Delta} =$$

$$= e^{-jk\pi} = \begin{cases} 1, & k=0 \text{ ó } k \text{ par} \\ -1, & k \text{ impar} \end{cases}$$

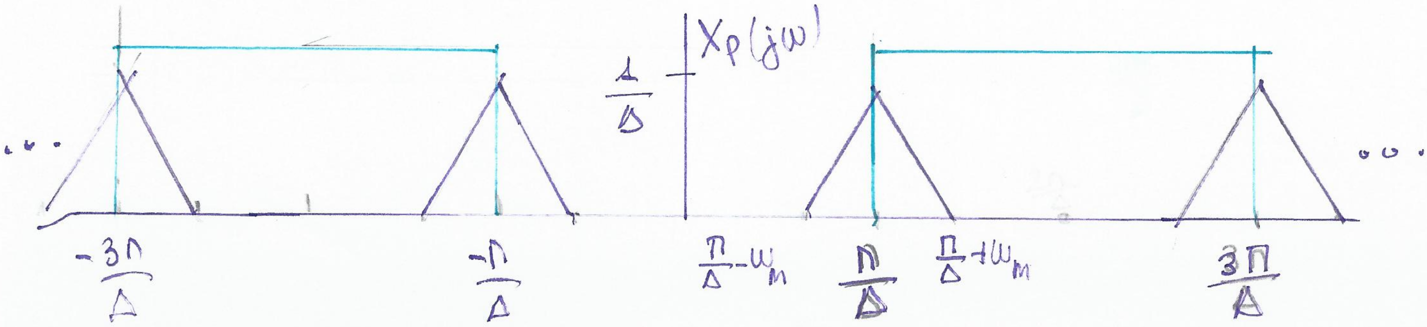
luego,

$$P(j\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{\Delta}\right)\underbrace{\left(1 - e^{-jk\pi}\right)}_{0 \text{ ó } 2}$$



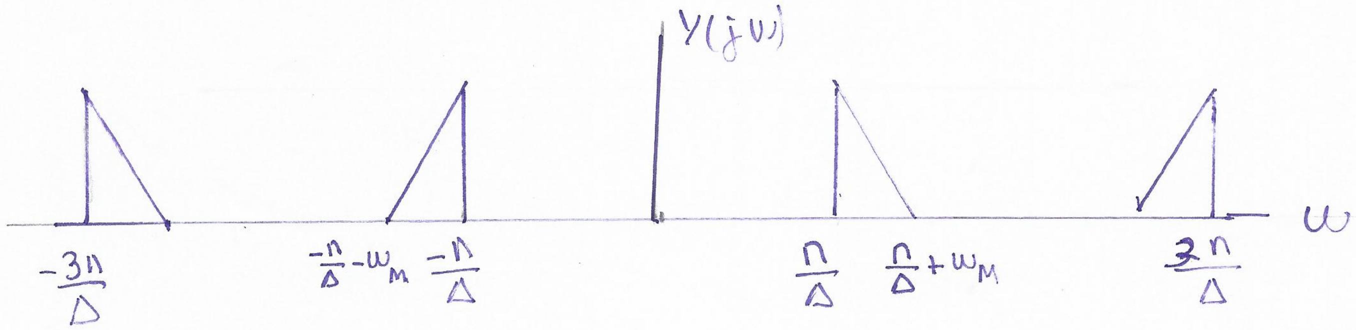
como $X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{\pi}{\Delta}\right)\left(1 - e^{-jk\pi}\right)$$



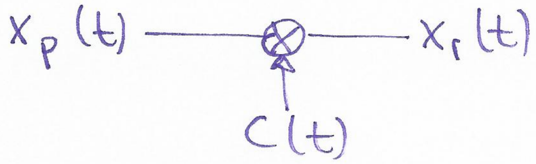
Puede verse que no aliasing si $\omega_M \leq \frac{\pi}{\Delta} \Rightarrow \Delta_{máx} = \frac{\pi}{\omega_M}$

$X_p(j\omega)$ se filtra mediante el filtro paso banda dado y así obtenemos $Y(j\omega)$:



b) Obtener un sistema que permita recuperar la señal de entrada a partir de $x_p(t)$

Para recuperar $x(t)$ de $x_p(t)$, modulo con un coseno para desplazar la señal:



Sabemos que $\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

luego: $\omega_0 = \frac{\pi}{\Delta}$:

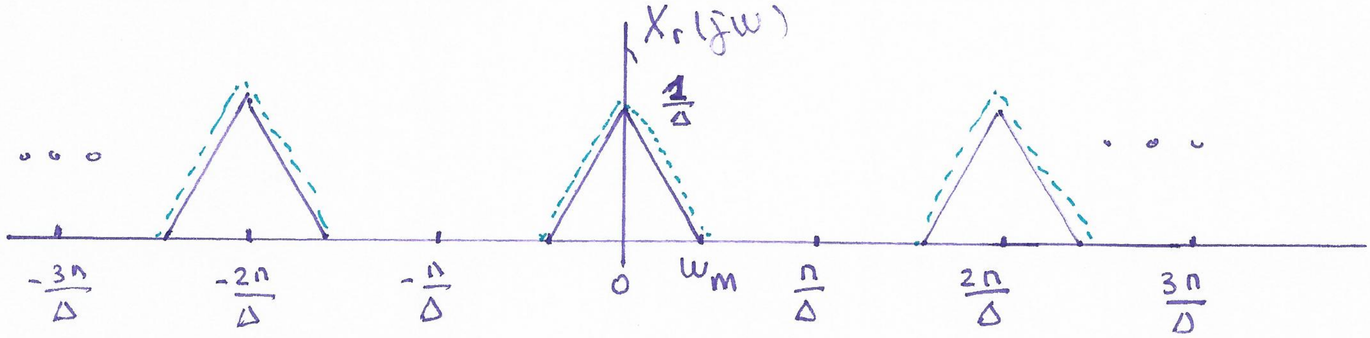
$$c(t)=\cos\left(\frac{\pi}{\Delta}t\right) \xleftrightarrow{FT} \pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\Delta}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\Delta}\right)\right]$$

y la señal modulada:

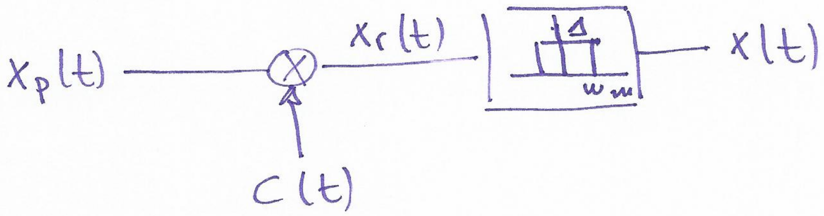
$$x_r(t)=x_p(t)\cdot c(t) \xleftrightarrow{FT} X_r(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_p(j\omega)*C(j\omega);$$

$$X_r(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}} X_p(j\omega) * \cancel{\pi}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\Delta}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\Delta}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} X_p\left(j\omega - j\frac{\pi}{\Delta}\right) + \frac{1}{2} X_p\left(j\omega + j\frac{\pi}{\Delta}\right)$$

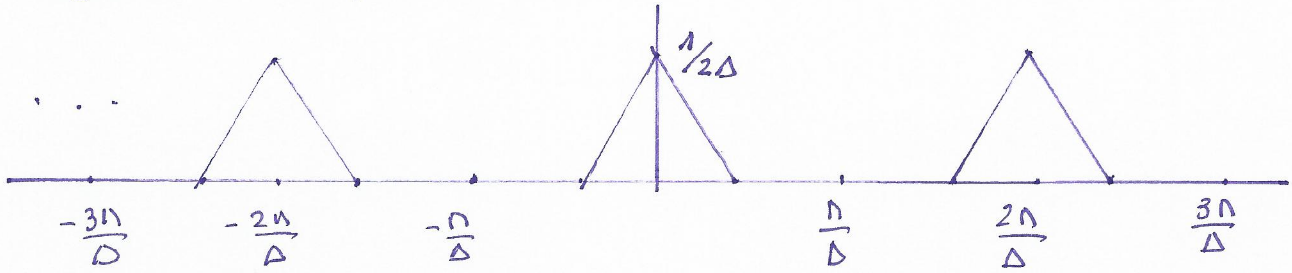


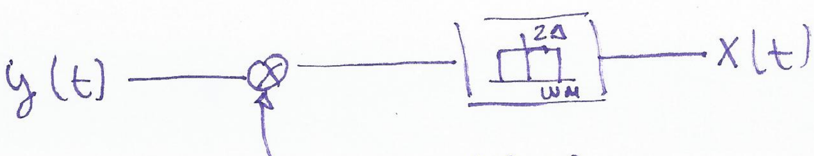
y si filtramos con un paso bajo recuperamos la señal de entrada $x(t)$



c) Obtener un sistema que permita recuperar la señal de entrada a partir de $y(t)$

Siguiendo el proceso anterior:





$c(t) = \cos\left(\frac{\pi}{\Delta} t\right)$